

CORRIGÉ 1 Rappel : Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.

Montrons par récurrence que la propriété \mathcal{P}_n : « 111 divise $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : 111 divise $10^2 + 10 + 1 = 111$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que \mathcal{P}_k est vraie.

$$10^{6(k+1)+2} + 10^{3(k+1)+1} + 1 = 10^{6k+8} + 10^{3k+4} + 1 = 10^6 \times 10^{6k+2} + 10^3 \times 10^{3k+1} + 1$$

$$= (9 \times 111 + 1)^2 \times 10^{6k+2} + (9 \times 111 + 1) \times 10^{3k+1} + 1 = 111k_1 + 10^{6k+2} + 10^{3k+1} + 1,$$
où $k_1 = (81 \times 111 + 18) \times 10^{6k+2} + 9 \times 10^{3k+1} \in \mathbb{N}$
Par hypothèse de récurrence, il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $10^{6k+2} + 10^{3k+1} + 1 = 111k_2$.
Finalement, $10^{6(k+1)+2} + 10^{3(k+1)+1} + 1 = 111(k_1 + k_2)$.
Or $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ donc 111 divise $10^{6(k+1)+2} + 10^{3(k+1)+1} + 1$.
On a ainsi montré $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.
- Conclusion : \mathcal{P}_n est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

CORRIGÉ 2 ① P_0 : $1 > 0$ est vrai.

P_1 : $2 > 1$ est vrai donc $P_0 \Rightarrow P_1$ est vrai

P_2 : $4 > 4$ est faux donc $P_1 \Rightarrow P_2$ est faux et $P_2 \Rightarrow P_3$ est **vrai**

P_3 : $8 > 9$ est faux donc $P_3 \Rightarrow P_4$ est vrai

P_4 : $16 > 16$ est faux donc $P_4 \Rightarrow P_5$ est vrai

Montrons que pour tout $n \geq 5$ on a $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 5$. Supposons que P_n est vrai.

$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2$ par hypothèse de récurrence.

Le trinôme $2x^2 - (x+1)^2 = (\sqrt{2}x - (x+1))(\sqrt{2}x + (x+1)) = ((\sqrt{2}-1)x - 1)((\sqrt{2}+1)x + 1)$ est positif
sauf entre ses racines $\frac{1}{\sqrt{2}-1} \simeq 2,4$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}+1} < 0$.

En particulier le trinôme est positif en $x = n$ car $n \geq 5$. On a donc $2n^2 > (n+1)^2$.

Donc $2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2$. On a montré que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ pour $n \geq 5$

Finalement $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

② D'après ce qui précède, on sait déjà que P_n est vrai pour $n \in \{0; 1\}$ et faux pour $n \in \{2; 3; 4\}$.

Montrons par récurrence que P_n est vrai pour tout $n \geq 5$.

(a) Initialisation : $2^5 = 32$ et $5^2 = 25$ donc $2^5 > 5^2$ et P_5 est vrai.

(b) Hérédité : par la question précédente, on sait que pour tout $n \geq 5$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

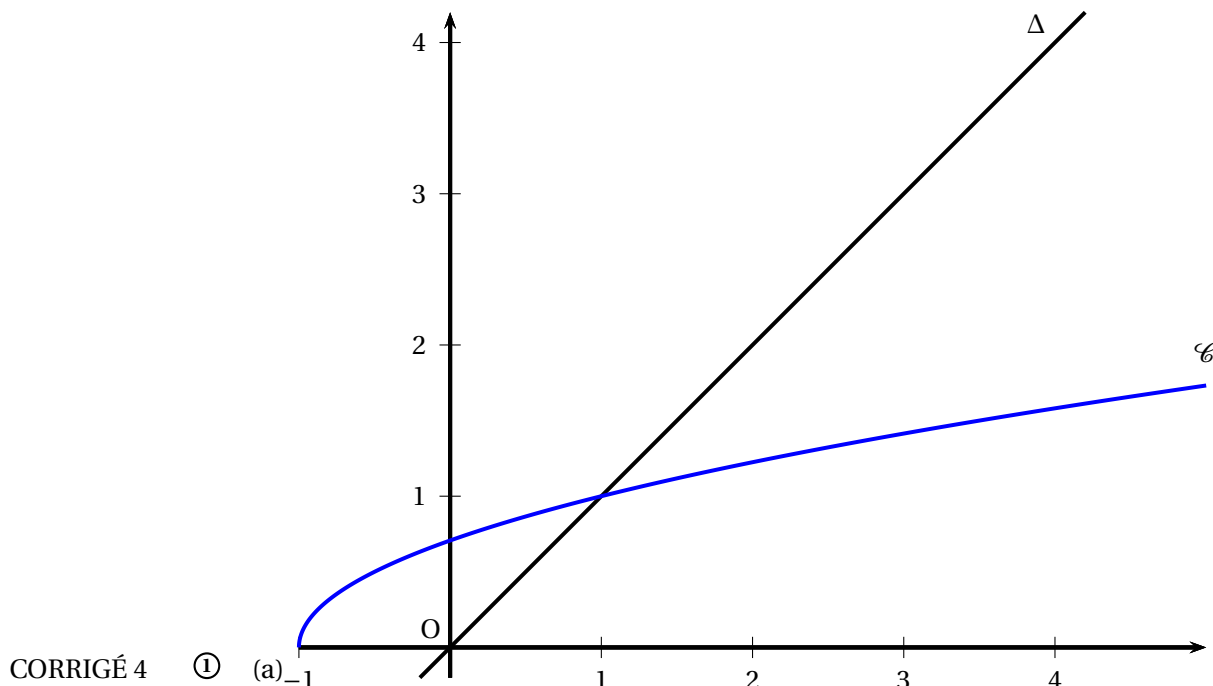
(c) Conclusion : P_n est vrai pour $n = 5$ et est héréditaire, donc est vrai pour tout $n \geq 5$. Finalement, P_n est vraie pour tout $n \in \{0; 1\} \cup [5; +\infty[$.

CORRIGÉ 3 L'hérédité est fausse dans le cas $P(2) \Rightarrow P(3)$.

En effet, soient A_1, A_2, A_3 trois points distincts.

A_1, A_2 sont alignés sur une droite d et A_2, A_3 sont alignés sur une droite d' .

Les deux droites d et d' ont un seul point commun (A_2) et ne sont donc pas nécessairement confondues.



CORRIGÉ 4 ① (a) $_{-1}$

(b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement décroissante et convergente vers 1.

② Montrons par récurrence que la propriété $P(n) : « 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4 »$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** : $u_0 = 4$ et $u_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

On a bien $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$, donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

La fonction $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ étant croissante sur $[0; 4]$ (par composition des deux fonctions croissantes que sont la fonction affine $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ suivie de la fonction racine carrée), on a :

$$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4) \text{ et donc :}$$

$$0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq 4$$

- **Conclusion** : la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

③ La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel $\ell \geq 0$.

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ donc d'une part } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \ell$$

$$\text{et d'autre part } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\ell}{2}}$$

On résout donc sur $[0; +\infty[$ l'équation :

$$\ell = \sqrt{\frac{1+\ell}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = \frac{1+\ell}{2} \text{ car } \ell \geq 0 \text{ sans quoi il n'y a pas équivalence}$$

$\Leftrightarrow 2\ell^2 - \ell - 1 = 0$ Le membre de gauche est un trinôme possédant une racine évidente : 1, donc il est factorisable par $\ell - 1$:

$$\Leftrightarrow (\ell - 1)(2\ell + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 1 \text{ ou } \ell = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ell = 1 \text{ car } \ell \geq 0$$

CORRIGÉ 5 ① (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{8x+3}{x+6}$ est définie et dérivable sur $[1;3]$ et on a :

$$f'(x) = \frac{8(x+6) - 1(8x+3)}{(x+6)^2} = \frac{45}{(x+6)^2} > 0$$

Ainsi f est strictement croissante sur $[1;3]$

Montrons par récurrence que la propriété $P(n) : « 1 < u_n < 3 »$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

• **Initialisation** : $u_1 = \frac{8 \times \frac{1}{2} + 3}{\frac{1}{2} + 6} = \frac{14}{13}$. On a bien $1 < u_1 < 3$, donc $P(1)$ est vraie.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire : $1 < u_n < 3$

La fonction f étant strictement croissante sur $[1;3]$, on a :

$$f(1) < f(u_n) < f(3) \text{ donc } 1 < \frac{11}{7} < u_{n+1} < 3$$

• **Conclusion** : la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6} - u_n = \frac{8u_n + 3 - u_n(u_n + 6)}{u_n + 6} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{u_n + 6}$$

Le trinôme $-x^2 + 2x + 3$ admet -1 comme racine évidente donc est factorisable par $x + 1$, si bien que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(-u_n + 3)}{u_n + 6}$$

$u_n > 1$ donc $u_n + 1$ et $u_n + 6$ sont positifs

$u_n < 3$ donc $-u_n + 3$ est positif.

Finalement $u_{n+1} - u_n$ est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est strictement croissante.

② Soit $n \in \mathbb{N}$

$$(a) \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{8u_n + 3}{u_n + 6} - 3}{\frac{8u_n + 3}{u_n + 6} + 1} = \frac{8u_n + 3 - 3(u_n + 6)}{8u_n + 3 + u_n + 6} = \frac{5u_n - 15}{9u_n + 9} = \frac{5}{9} \times \frac{u_n - 3}{u_n + 1} = \frac{5}{9} v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{5}{9}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 1} = -\frac{5}{3}$

(b) $-1 < q < 1$ donc la suite géométrique (v_n) tend vers 0.

③ Soit $n \in \mathbb{N}$.

Premièrement, on connaît la forme explicite de $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{5}{3} \left(\frac{5}{9}\right)^n$.

Deuxièmement, on a besoin d'exprimer u_n en fonction de v_n :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \iff v_n(u_n + 1) = u_n - 3 \iff u_n v_n + v_n - u_n + 3 = 0 \iff u_n - u_n v_n = v_n + 3 \iff$$

$$u_n(1 - v_n) = v_n + 3 \iff u_n = \frac{3 + v_n}{1 - v_n}$$

Les équivalences sont assurées par le fait qu'aucun dénominateur n'est nul!

$$\text{Finalement, } u_n = \frac{3 - \frac{5}{3} \left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 + \frac{5}{3} \left(\frac{5}{9}\right)^n}$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$